**13. Характеристические функции.**

**Определение.** Характеристической функцией случайной величины называется комплекснозначная функция вещественного аргумента *t* :

Здесь *i* обозначает мнимую единицу,

**Теорема 13.1.** Основные свойства характеристических функций:

1). .

2). Если .

3). Если и независимы, то

4). Если существует *k*-й момент то

Доказательство. Первые два свойства очевидны; третье свойство следует из Теоремы 11.2:

Для доказательства последнего свойства вычислим производные характеристической функции:

положив получим доказываемое соотношение. Из него следует, что характеристическую функцию можно разложить в ряд Тейлора:

**Пример 13.1.** Характеристическая функция биномиального распределения. Здесь, как и в Параграфе 11, удобно представить случайную величину в виде суммы независимых одинаково распределенных бинарных случайных величин, , . Каждая имеет характеристическую функцию

Вследствие свойства 3),

.

**Пример 13.2.** Характеристическая функция распределения Пуассона. Распределение Пуассона было определено в Параграфе 7,

,

для него

**Пример 13.3.** Характеристическая функция гауссовского распределения. Сначала рассмотрим стандартное нормальное, . Представляя экспоненту по формуле Эйлера,

видим, что мнимая часть обращается в 0, так как *p(x)* – симметричная функция, а *sin* – антисимметричная, следовательно, для симметричной плотности характеристическая функция вещественна,

Продифференцируем,

и проинтегрируем по частям,

Получили дифференциальное уравнение для , или

решение которого:

согласно начальному условию , получаем и окончательно характеристическая функция стандартного нормального распределения

.

Для гауссовского распределения общего вида, согласно свойству 2),

.

С помощью характеристической функции легко вывести свойство нормального распределения для независимых случайных величин, доказанное в Параграфе 12: сумма двух независимых нормальных случайных величин имеет нормальное распределение. Пусть независимые , тогда

и в силу свойства 3),

Отметим еще: как следует из свойств характеристических функций, гауссовское распределение имеет моменты всех порядков.

Несколько важных свойств характеристических функций сформулируем здесь без доказательства. Если распределение абсолютно непрерывно (существует плотность распределения *p(x))* и характеристическая функция интегрируема (), то

(***формула обращения***). Таким образом, характеристическая функция случайной величины однозначно определяет ее распределение.

**Теорема Хелли.** Пусть - последовательность характеристических функций и - последовательность соответствующих функций распределения. Если при любом *t* последовательность сходится к некоторой функции , непрерывной в 0, то

1. есть характеристическая функция, соответствующая некоторой функции распределения *;*
2. последовательность сходится к в точках непрерывности функции .

**Пример 13.4.** Доказательство теоремы Пуассона с помощью характеристических функций. Рассмотрим схему Бернулли в условиях Теоремы 5.1. Характеристическую функцию в схеме Бернулли (Пример 13.1.) обозначим

переходя к пределу, получаем

а это есть характеристическая функция распределения Пуассона (Пример 13.2.).

**Пример 13.4.** С помощью формулы обращения легко доказать, что является характеристической функцией распределения Коши,

Действительно, разделив интеграл на две области интегрирования, получаем,

**Упражнение 13.1.** С помощью характеристической функции вычислить моменты гауссовского распределения (*k* = 1, 2, 3,…, *n*). Чему равны асимметрия и эксцесс?